Translation of Folk Method Analysis_(six Method - a Local device) : Mahit Warhadpande From Azim premji University At Right Angles_March,2021

उच्चतर माध्यमिक कक्षा में

लोक विधि विश्लेषण

(छठी विधि — एक स्थानीय युक्ति)

महित वर्हाडपाण्डे
http://www. jigyasujuggler.com

(**मोहम्मद उमर** के लेख 'एक पेड़ की ऊँचाई', *अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी एट राइट एंगल्स,* नवम्बर 2020, पृष्ठ संख्या : 33-34 के सन्दर्भ में एक पाठक की ओर से प्रस्तुत)

मुख्य शब्द : *लोक गणित, विश्लेषण, विवेचना, समरूपता*

विभिन्न लोग अपने शरीर को कमर से आगे की तरफ़ अलग-अलग मात्रा में मोड़ सकते हैं। जिनका शरीर अत्यधिक लचीला होता है, वे अपने पैरों के बीच में अपने सिर रखकर चित्र-1 की तरह अपने पीछे की तरफ़ लगभग सीधे देख सकते हैं। जिनका शरीर कम लचीला होता है, वे चित्र-2 में दिखाई गई स्थिति अनुसार मुड़ सकते होंगे।



चित्र-1



चित्र-2

इसके अलावा मुद्रा में अन्तर पैरों को अलग-अलग दूरी पर फैलाने के कारण या अगर कोई अनजाने में थोड़ा आगे या पीछे की ओर झुक जाए तो भी हो सकता है (यानी ज़मीन के सन्दर्भ में पैर पूरी तरह से लम्बवत तल में नहीं हैं)। इसलिए, ऐसा लगता है कि इस तरह से माप

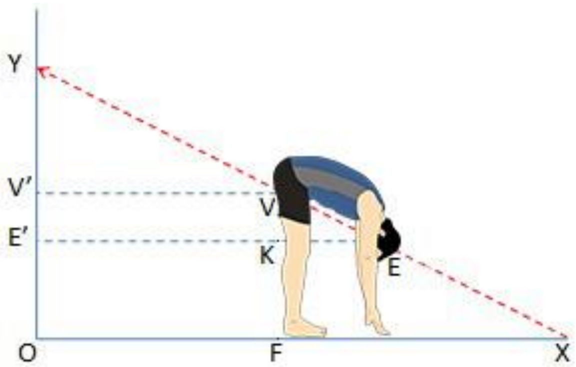
लेने का प्रयास करने वाले विभिन्न लोग (या एक ही व्यक्ति अगर इस प्रयोग को दोहरा रहा है) अलग-अलग परिणाम प्राप्त कर सकते हैं।

मान्यताएँ

हम यह मान लेते हैं कि एक 'सामान्य' व्यक्ति के शरीर की मुद्रा चित्र-2 के समान होगी और वह व्यक्ति हर बार उसी मुद्रा को दोहराने में सक्षम होगा। इस स्थिति में, उस व्यक्ति के लिए निम्नलिखित मापदण्ड (चित्र- 3, देखें) स्थिर रहेंगे :

- $\angle VKE = \angle VFX = 90°$
- E = इस स्थिति में ज़मीन से ऊपर आँख का स्तर
- V = ज़मीन से ऊपर उल्टे V की नोंक का स्तर
- EK = पैरों और आँखों के बीच की क्षैतिज दूरी
- इसका मतलब है कि इस स्थिति में $\angle VEK$ स्थिर है

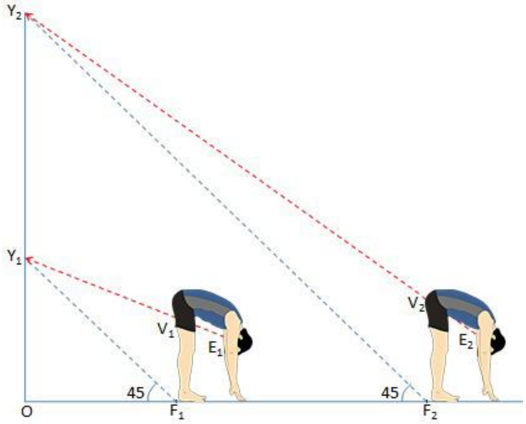
इस स्थिति में यह दावा किया जा सकता है कि किसी वस्तु की ऊँचाई OY दूरी OF के बराबर होगी।



चित्र-3

विश्लेषण

आइए, अब हम ऊपर दी गई मान्यताओं के तहत इस पद्धति के गणितीय निहितार्थों का विश्लेषण करते हैं। चित्र-4 में 2 अलग-अलग ऊँचाइयों (OY_1 और OY_2) की वस्तुओं और दर्शक की दो अलग-अलग स्थितियों (F_1 और F_2) को एक-दूसरे पर आरोपित (superimposed) किया गया है। अब यदि $OY_1 = OF_1$ और $OY_2 = OF_2$ तो $\angle Y_1F_1O$ और $\angle Y_2F_2O$ प्रत्येक 45° के हैं, तब फिर $\angle V_1F_1Y_1$ और $\angle V_2F_2Y_2$ भी 45° के होने चाहिए।

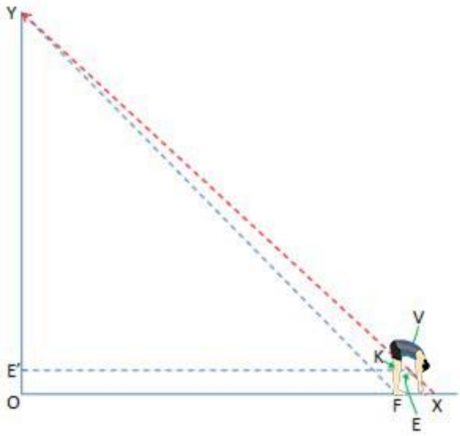


चित्र-4

एक स्थिर मुद्रा में $V_1F_1 = V_2F_2$ (हमारी मान्यता के अनुसार) होंगे। इसके अलावा $\angle V_2Y_2F_2 < \angle V_1Y_1F_1$ (इसे साइन नियम और $Y_2V_2 > Y_1V_1$ तथ्य का उपयोग करके साबित किया जा सकता है) होगा। इसका मतलब है कि $\angle Y_2V_2F_2 > \angle Y_1V_1F_1$ होगा। इसलिए सम्पूरक कोण $E_1V_1F_1$ और $E_2V_2F_2$ अलग (पहले वाला बड़ा है) होंगे। *हालाँकि, वास्तविकता में यह दोनों कोण समान होने चाहिए क्योंकि यह पूरी तरह से मुद्रा द्वारा निर्धारित होते हैं, जिसको हमने स्थिर माना है।* इसलिए, सामान्यत:, हमें अपनी मान्यता के साथ सही परिणाम **नहीं** मिल पाएगा।

अपनी मान्यता को परिष्कृत करना

यदि मापी जाने वाली ऊँचाई (और इसलिए OF भी) हमारे शरीर की विमाओं की तुलना में बहुत बड़ी होती है तो $\angle YFO$ लगभग $\angle YEE'$ ($=\angle VEK$) के बराबर होगा, या समतुल्य रूप से, $\angle VYF$ बहुत छोटा होगा (चित्र-5, देखें)। अगर $\angle VEK = 45$ भी है, तब OF (जो कि OX के लगभग बराबर होगा यदि शरीर की विमाएँ OF की तुलना में नगण्य हैं) वस्तु की ऊँचाई OY का एक क़रीबी अनुमान देगा।



चित्र-5

तो यह 'लोक विधि' (यानी, विधि 6) काम करे इसका एक तरीक़ा यह है कि हम अपनी मान्यताओं को निम्नानुसार परिष्कृत करें :

1. मापने वाला व्यक्ति शरीर की मुद्रा को इस तरह दोहरा सकता है कि $\angle VEK \approx 45°$; अर्थात $VK \approx EK$ हो।
2. मापी जाने वाली ऊँचाई मानव शरीर की विमाओं से बहुत बड़ी हो।

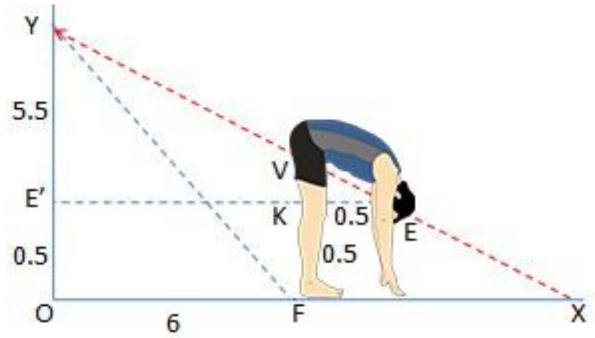
यह दो मान्यताएँ विधि 6 को गणितीय रूप से लेख में वर्णित विधि 3 के समतुल्य बनाती हैं। विशेषकर, मान्यता 2 के तहत, विधि 3 भी ज़मीन के ऊपर आँख के स्तर को ध्यान में रखे बिना अच्छी तरह से काम करेगी क्योंकि यह नगण्य होगा।

विकल्प के तौर पर, दूसरी मान्यता के बजाय, हम $OX = OY$ (वस्तु की ऊँचाई) का दावा कर सकते हैं जहाँ रेखा VE को ज़मीन के स्तर तक बढ़ाकर बिन्दु X प्राप्त किया जाता है। मान्यता 1 और यह दावा कि $OX = OY$ विधि 6 को गणितीय रूप से विधि 5 के समतुल्य बनाते हैं।

अन्त में, हम प्रत्येक माप के लिए $\angle VEK \approx 45$ की समान मुद्रा को दोहराने की आवश्यकता में भी ढील दे सकते हैं–यह देखते हुए कि त्रिभुज VEK और YXO समरूप हैं और VK, EK और OX को मापा जा सकता है। फिर हम समरूपता सम्बन्ध $OY: OX = VK: EK$ का उपयोग करके वस्तु की ऊँचाई OY को निर्धारित कर सकते हैं। यही बात विधि 3 और विधि 5 पर भी लागू होती है।

उदाहरण गणना

मान लेते हैं कि विधि 6 के माध्यम से मापी गई ऊँचाई 6 मीटर थी (यह वास्तव में 6.24 मीटर थी, लेकिन हमने इसे सुविधा के लिए सन्निकटित कर दिया है) और यह वास्तव में पेड़ की सही ऊँचाई थी। शरीर की प्रासंगिक विमाओं (EK, KF चित्र6 में) को वास्तविक रूप से लगभग 0.5 मीटर माना जा सकता है। फिर चित्र- 6 में, यदि $OY = OF = 6$ मीटर है, तो हमें $EE' = 6.5$ मीटर और $YE' = 5.5$ मीटर मिलेगा। इसका मतलब है $\angle YEE' = \angle VEK = \tan^{-1} 5.5/6.5 \approx 40°$ जो कि $\angle VEK = 45°$ की हमारी मान्यता से अलग मुद्रा है। $EK = 0.5$ मीटर होने पर इस तरह की मुद्रा के आने की एक सम्भावना यह है कि $VK = EK \cdot \tan 40° = 0.5 \cdot \tan 40° \approx 0.42$ मीटर हो। फिर उस व्यक्ति को $\angle VEK = 45°$ प्राप्त करने के लिए अपनी मुद्रा को इस तरह समायोजित करना होगा (उदाहरण, पीठ और गर्दन को अलग तरह से झुकाकर) कि $EK = VK = 0.42$ मीटर हो। नीचे दी गई तालिका $\angle VEK = 40°$ और $45°$ की मुद्राओं के लिए उन परिणामों की तुलना करती है जो हमें पेड़ की ऊँचाई के विभिन्न अनुमानों के लिए मिलते हैं। स्पष्टता के लिए, अन्त में "गणना विवरण" खण्ड में एक नमूना गणना की गई है।



चित्र-6

जैसा कि अपेक्षित था, दोनों ही मामलों में वस्तु की ऊँचाई बढ़ने पर $\angle YFO$ का मान $\angle VEK$ के मान की ओर बढ़ता है। हालाँकि पेड़ की ऊँचाई के लिए 6 मीटर का अनुमान तब बेहतर हो जाता है जब $\angle VEK = 40°$ होता है। इस मुद्रा को उपयोग करने का मतलब है कि वस्तु की ऊँचाई के साथ त्रुटि परिमाण बढ़ता जाता है, जबकि सापेक्ष त्रुटि मान $\tan 45/\tan 40 - 1 \approx 19\%$ तक पहुँच जाता है। दूसरी ओर जब $\angle VEK = 45°$ होता है तब निरपेक्ष त्रुटि स्थिर रहती है (और वास्तव में यह समाप्त हो सकती है यदि हम $OY = OX$ का उपयोग करते हैं), जबकि जैसे-जैसे हम ऊँची वस्तुओं की ओर आगे बढ़ते हैं सापेक्ष त्रुटि कम होती जाती है। इस प्रकार विधि 6 से ऊँचाई मापने के लिए $\angle VEK = 45°$ अधिक वांछनीय मुद्रा होगी। जैसा कि मान्यता 1 बताते हुए संकेत दिया गया है, $\angle VEK = 45°$ को इस तरह से झुकने का अभ्यास करके प्राप्त किया जा सकता है कि हमें $VK = EK$ मिले।

गणना विवरण (वस्तु की वास्तविक ऊँचाई $OY = 60$ मीटर, $\angle VEK = 40°$)

चित्र-6 में, यदि हम $\angle VEK = 40°$ की मुद्रा का उपयोग करते हैं तो ऊपर की गणना के अनुसार $VK = 0.42$ मीटर होता है । ध्यान दें कि $\angle VXF = \angle VEK$। चूँकि $VF = 0.5 + 0.42 = 0.92$, त्रिभुज VXF में $FX = VF/\tan\angle VXF = 0.92/\tan 40° = 1.1$ मीटर। इसके अलावा त्रिभुज YXO में $OY = 60$ मीटर के साथ हमें $OX = OY/\tan\angle YXO = 60/\tan 40° \approx 71.5$ मीटर मिलता है। तब $OF = OX - FX = 71.5 - 1.1 = 70.4$ मीटर अनुमानित वस्तु की ऊँचाई होगी। अन्त में त्रिभुज YFO में $\angle YFO = \tan^{-1} YO/FO = \tan^{-1} 60/70.4 \approx 40.44°$।

तालिका में सूचीबद्ध अन्य परिणामों की गणना इसी तरह की गई है। विशेष रूप से, उस स्थिति के लिए जब $\angle VEK = 45°$ है, हमने मान लिया है कि मुद्रा $EK = 0.42 = VK$ होगी।

वस्तु की वास्तविक ऊँचाई (मीटर में)	$\angle VEK = 40^\circ$			$\angle VEK = 45^\circ$		
	अनुमानित ऊँचाई (मीटर में)	**त्रुटि (% में)**	$\angle YFO$	**अनुमानित ऊँचाई (मीटर में)**	**त्रुटि (% में)**	$\angle YFO$
6	6.05	+0.8	44.76	5.08	-15.3	49.75
60	70.4	+17.3	40.44	59.08	-1.5	45.44
100	118	+18	40.28	99.08	-0.9	45.26

अनुवाद : रिधि अग्रवाल **पुनरीक्षण तथा कॉपी एडीटिंग :** कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही